Esercizi

Equazioni irrazionali

1) $2+\sqrt{x^2-2x+5} = x+\sqrt{5}$

$\sqrt{x^2-2x+5} = x+\sqrt{5}-2$ (si isola la radice)

$\cancel{x^2}-2x+\cancel{5} = \cancel{x^2}+\cancel{5}+4+2x\sqrt{5}-4x-4\sqrt{5}$ (si eleva al quadrato)

$2x(-1-\sqrt{5}+2) = 4-4\sqrt{5}$

$2x\,\cancel{(1-\sqrt{5})} = 4\,\cancel{(1-\sqrt{5})}$, $\quad 2x=4$, $\quad x=2$

Si verifica la soluzione:

$2+\sqrt{5} = 2+\sqrt{5}$

$x=2$ è soluzione dell'equazione.

2) $\sqrt{8x-3}+\sqrt{8x+1} = \sqrt{6}$

$\sqrt{8x-3} = \sqrt{6}-\sqrt{8x+1}$ (conviene separare i radicali contenenti l'incognita x)

$\cancel{8x}-3 = 6+\cancel{8x}+1-2\sqrt{6(8x+1)}$ (Si eleva al quadrato)

$-\cancel{10}^{\,5} = -\cancel{2}\sqrt{48x+6}$ (Si isola il radicale)

$25 = 48x + 6$ (si eleva al quadrato)

$48x = 19$, $x = \frac{19}{48}$

Si verifica la soluzione:

$\sqrt{\frac{\cancel{8} \cdot 19}{\cancel{48}_{6}} - 3} + \sqrt{\frac{\cancel{8} \cdot 19}{\cancel{48}_{6}} + 1} = \sqrt{6}$

$\sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{25}{6}} = \sqrt{6}$, $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$, $\sqrt{6} = \sqrt{6}$

la soluzione $x = \frac{19}{48}$ è accettabile.

Disequazioni irrazionali

Metodo grafico

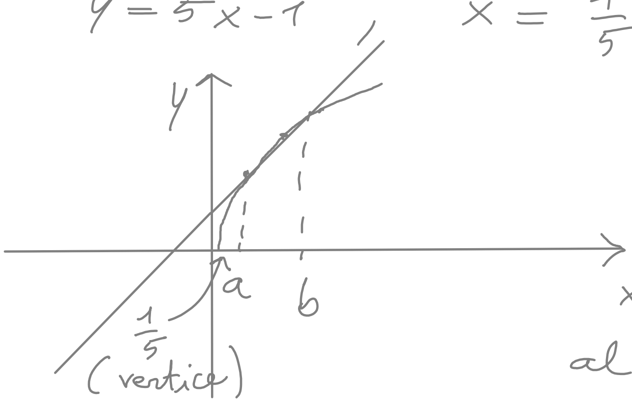
3) $x + 1 > \sqrt{5x - 1}$

Rappresentiamo le curve di equazioni
$y = x + 1$ (una retta) e $y = \sqrt{5x - 1}$.

La seconda curva è una parabola:

$y^2 = 5x - 1$, $x = \frac{1}{5}y^2 + \frac{1}{5}$, $y_V = -\frac{b}{2a} = 0$

$x_V = \frac{1}{5}$



La retta si trova al di sopra della parabola per i valori $\frac{1}{5} < x < a$ e $x > b$, dove a e b si trovano risolvendo l'equazione:

$x+1=\sqrt{5x-1}$, elevando al quadrato

$x^2+2x+1=5x-1$,

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$, $x=1$, $x=2$

(entrambe soluzioni accettabili).

Quindi $a=1$ e $b=2$, e le soluzioni della disequazione sono i valori

$\frac{1}{5} \leq x < 1$, $x > 2$.

Metodo algebrico

4) Risolviamo la disequazione n.3 con il metodo algebrico:

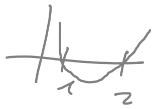
$x+1 > \sqrt{5x-1}$

$\sqrt{5x-1} < x+1$, questa disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \\ 5x-1 < (x+1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x > -1 \\ 5x-1 < x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x > -1 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x > -1 \\ (x-1)(x-2) > 0 \end{cases}$$

(parabola)



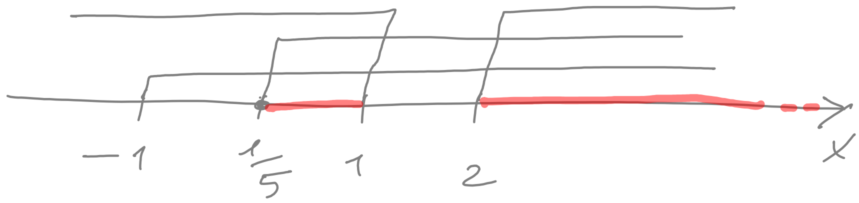
$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x > -1 \\ x < 1, \quad x > 2 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione si ottengono intersecando questi tre insiemi:

$x \geq \frac{1}{5}$

$x > -1$

$x < 1, \; x > 2$



Le soluzioni sono i valori:

$\frac{1}{5} \leq x < 1$ e $x > 2$

5) $\sqrt{10x+6} > 9 - x$

Questa disequazione è equivalente ai sistemi:

$$\begin{cases} 9 - x < 0 \\ 10x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 9 - x \geq 0 \\ 10x + 6 > (9-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 9 \\ x \geq -\frac{3}{5} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x \leq 9 \\ 10x + 6 > 81 + x^2 - 18x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 9 \\ x \geq -\frac{3}{5} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x \leq 9 \\ x^2 - 28x + 75 < 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$(x-25)(x-3) < 0$$

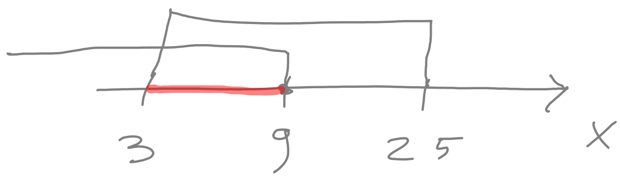
$$\begin{cases} x > 9 \\ x \geq -\frac{3}{5} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x \leq 9 \\ 3 < x < 25 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema

sono :

$x > 9$

Le soluzioni del secondo sistema sono:



$3 < x \leq 9$

Le soluzioni della disequazione sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi :

$3 < x \leq 9 \;\cup\; x > 9$, quindi $x > 3$.