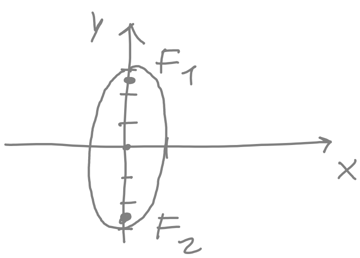
Esercizi sull'ellisse

1) Rappresenta l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ e determina i fuochi e l'eccentricità.

Risposta

In questo caso $a = 1$ e $b = 3$, quindi il semiasse maggiore e i fuochi si trovano sull'asse y.



Per trovare i fuochi e l'eccentricità:

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$F_1 = (0, 2\sqrt{2})$, $F_2 = (0, -2\sqrt{2})$, $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0,94$

2) Determina i punti dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 2$ distanti 1 dall'origine del sistema di riferimento.

Risposta

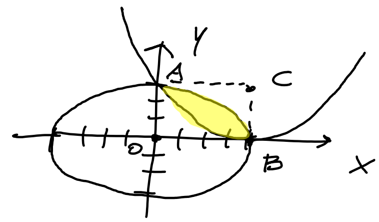
La distanza di un punto $P(x, y)$ dall'origine è $x^2 + y^2$, quindi $x^2 + y^2 = 1$

Se il punto appartiene all'ellisse $x^2 = 2 - 4y^2$, da cui: $2 - 4y^2 + y^2 = 1$, $3y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x^2 = 2 - 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Le soluzioni sono quindi i 4 punti di coordinate $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3) Determina l'area della regione di piano colorata, delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ e dalla parabola avente vertice in B e passante per A.



Risposta

L'area della parte colorata è la differenza tra l'area di $\frac{1}{4}$ di ellisse e l'area sottesa alla parabola nel I quadrante ($\frac{1}{3}$ dell'area del rettangolo OBCA):

$$A = \frac{1}{4}\pi\cdot 4\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3 = 3\pi - 4 \simeq 5{,}4$$

4) Determina per quale valore di a, con $a>0$, l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse $\frac{x^2}{4a^2}+9y^2=1$ è uguale a 10π.

Risposta

I semiassi sono $2a$ e $\frac{1}{3}$. L'area vale $A = \pi\cdot 2a\cdot\frac{1}{3}$ ed è uguale a 10π:

$\frac{2}{3}\pi a = 10\pi$, $\frac{1}{3}a = 5$, $a = 15$

5) Determina i punti di intersezione tra l'ellisse di equazione $x^2+3y^2=4$ e la retta di equazione $x-3y+2=0$.

Risposta

$$\begin{cases} x^2+3y^2=4 \\ x=3y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+3y^2=4 \\ x^2=9y^2+4-12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+4-12y+3y^2=4 \\ x=3y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 12y^2-12y=0 \\ x=3y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y(y-1)=0 \\ x=3y-2 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono:

$A(-2,0)$ e $B(1,1)$.

6) Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $4x^2+y^2=4$, passanti per il punto $P(-2,0)$

Risposta

Il fascio di rette di centro P è: $y=m(x+2)$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=4 \\ y=mx+2m \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+(mx+2m)^2=4 \\ y=mx+2m \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione:

$$4x^2 + m^2x^2 + 4m^2 + 4m^2x = 4$$

$$x^2(4+m^2) + 4m^2x + 4m^2 - 4 = 0$$

La condizione di tangenza è:

$\Delta(m) = 0$, (oppure $\frac{\Delta}{4} = 0$) cioè

$$\frac{\Delta}{4}(m) = 4m^4 - (4+m^2)(4m^2-4) = 0$$

$$\cancel{4m^4} - 16m^2 + 16 - \cancel{4m^4} + 4m^2 = 0$$

$12m^2 = 16$, $\quad m^2 = \frac{4}{3}$, $\quad m = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Le equazioni delle rette tangenti sono:

$$y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+2)$$

7) Scrivi l'equazione dell'ellisse i cui fuochi hanno coordinate $(\pm\sqrt{5}, 0)$ ed il cui semiasse maggiore è 3

Risposta

$c = \sqrt{5}$, $\quad a = 3$

si ha quindi $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-5} = 2$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$